

§1.4.Hệ Phương Trình tuyến tính

Biên soạn: Th.S.Dương Đức Kiên

Trường Cao Đẳng Kỹ Thuật Lý Tự Trọng TP.Hồ Chí Minh

Tổ Toán học - Khoa khoa học cơ bản

1.4.1. Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

- Nếu $m = n$ thì hệ (1.1) được gọi là *hệ n phương trình bậc nhất đối với n ẩn số*.
- Hệ (1.1) được gọi là *thuần nhất* nếu $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.

Ví dụ 1:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

là hệ hai phương trình tuyến tính thuần nhất ba ẩn,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$$

là hệ hai phương trình không thuần nhất



1.4.1. Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính

- Nếu $m = n$ thì hệ (1.1) được gọi là *hệ n phương trình bậc nhất đối với n ẩn số*.
- Hệ (1.1) được gọi là *thuần nhất* nếu $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.

Ví dụ 1:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

là hệ hai phương trình tuyến tính thuần nhất ba ẩn,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$$

là hệ hai phương trình không thuần nhất



1.4.2. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Xét hệ phương trình tuyến tính (1.1). Ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gọi là *ma trận hệ số của hệ*. Ma trận

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

gọi là *ma trận cột vế phải* hay còn gọi là *ma trận hệ số tự do*.

1.4.2. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Ma trận

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

gọi là *ma trận ẩn số*. Khi đó, hệ (1.1) $\Leftrightarrow AX = B$ (phương trình ma trận của hệ phương trình tuyến tính (1.1))

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

1.4.2. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Ví dụ 2:

Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

Hãy viết dạng phương trình ma trận của hệ phương trình trên.

1.4.2. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Giải

Ta có:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Dạng phương trình ma trận của hệ phương trình đã cho là $AX = B$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1.4.3. Hệ Cramer

1.4.3.1. Định nghĩa.

Hệ phương trình tuyến tính

[illegible]

gọi là *hệ Cramer* nếu $m = n$ và $\det(A) \neq 0$.

1.4.3. Hệ Cramer

Ví dụ 3:

Hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

là hệ Cramer vì $m = n = 3$ và $\det(A) = 1 \neq 0$.

1.4.3. Hệ Cramer

1.4.3.2. Định lí.

Hệ Cramer có nghiệm duy nhất cho bởi công thức

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

bằng phương pháp Cramer.

Giải

Ta có:

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23 \neq 0.$$

Vậy hệ đã cho là hệ Cramer, nó có nghiệm duy nhất.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23.$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -46.$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -69.$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-23}{-23} = 1 \\ x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-46}{-23} = 2 \\ x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-69}{-23} = 3. \end{cases}$$

1.4.3. Hệ Cramer

Ví dụ 5:

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

bằng phương pháp Cramer.

Giải

Ta có:

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60 \neq 0.$$

Vậy hệ đã cho là hệ Cramer, nó có nghiệm duy nhất.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180.$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60.$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60.$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{180}{60} = 3 \\ y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{60}{60} = 1 \\ z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{60}{60} = 1. \end{cases}$$

1.4.4. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng biến đổi sơ cấp

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 14 \\ 8x_2 - 3x_3 = 5 \\ 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình thứ ba suy ra $x_3 = 1$, thế $x_3 = 1$ vào phương trình thứ hai suy ra $x_2 = 1$, thế $x_2 = 1, x_3 = 1$ vào phương trình thứ nhất ta được $x_1 = 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

1.4.4. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng biến đổi sơ cấp

1.4.4.2. Phương pháp Gauss

- Bước 1: Lập ma trận hệ số $\overline{A} = (A|B)$
- Bước 2: Dùng các phép biến đổi sơ cấp về hàng đưa ma trận hệ số A về ma trận dạng tam giác
- Bước 3: Lập hệ phương trình tam giác trên
- Bước 4: Giải hệ phương trình tìm nghiệm

1.4.4. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng biến đổi sơ cấp

1.4.4.2. Phương pháp Gauss

- Bước 1: Lập ma trận hệ số $\overline{A} = (A|B)$
- Bước 2: Dùng các phép biến đổi sơ cấp về hàng đưa ma trận hệ số A về ma trận dạng tam giác
- Bước 3: Lập hệ phương trình tam giác trên
- Bước 4: Giải hệ phương trình tìm nghiệm

1.4.4. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng biến đổi sơ cấp

1.4.4.2. Phương pháp Gauss

- Bước 1: Lập ma trận hệ số $\overline{A} = (A|B)$
- Bước 2: Dùng các phép biến đổi sơ cấp về hàng đưa ma trận hệ số A về ma trận dạng tam giác
- Bước 3: Lập hệ phương trình tam giác trên
- Bước 4: Giải hệ phương trình tìm nghiệm

1.4.4. Giải hệ phương trình tuyến tính bằng biến đổi sơ cấp

1.4.4.2. Phương pháp Gauss

- Bước 1: Lập ma trận hệ số $\overline{A} = (A|B)$
- Bước 2: Dùng các phép biến đổi sơ cấp về hàng đưa ma trận hệ số A về ma trận dạng tam giác
- Bước 3: Lập hệ phương trình tam giác trên
- Bước 4: Giải hệ phương trình tìm nghiệm

1.4.4. 2. Phương pháp Gauss

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \end{cases}$$

Giải

Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận A về dạng tam giác, cụ thể như sau:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & -1 & 6 \end{array} \right)$$

Giải hệ phương trình tuyến tính bằng biến đổi sơ cấp

1.4.4. 2. Phương pháp Gauss

$$\xrightarrow{-2d_1 + d_2 \rightarrow d_2; d_1 + d_3 \rightarrow d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}d_2 + d_3 \rightarrow d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{7}d_3 \rightarrow d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

1.4.4. 2. Phương pháp Gauss

Hệ đã cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 4x_2 - 5x_3 = 13 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Giải ngược từ dưới lên, ta có nghiệm của hệ phương trình là:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

1.4.4.2. Phương pháp Gauss

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

Giải

1.4.4.2. Phương pháp Gauss

Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa ma trận A về dạng tam giác, cụ thể như sau:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-2d_1 + d_2 \rightarrow d_2; -4d_1 + d_3 \rightarrow d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array} \right)$$

1.4.4. 2. Phương pháp Gauss

$$\xrightarrow{-d_2 + d_3 \rightarrow d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Hệ đã cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ -3y - 2z = -2 \\ -2z = 4 \end{cases}$$

Giải ngược từ dưới lên, ta có nghiệm của hệ phương trình là:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

Sau khi học xong bài học " Hệ phương trình tuyến tính":

- Hệ phương trình tuyến tính dạng tổng quát.
- Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính, hệ Cramer
- Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính bằng các phương pháp Cramer, Gauss.

Sau khi học xong bài học " Hệ phương trình tuyến tính":

- Hệ phương trình tuyến tính dạng tổng quát.
- Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính, hệ Cramer
- Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính bằng các phương pháp Cramer, Gauss.

Sau khi học xong bài học " Hệ phương trình tuyến tính":

- Hệ phương trình tuyến tính dạng tổng quát.
- Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính, hệ Cramer
- Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính bằng các phương pháp Cramer, Gauss.

Thành Phố Hồ Chí Minh, Thứ 6 ngày 24/03/2017

**XIN TRÂN TRỌNG
CẢM ƠN QUÝ THẦY CÔ!**

► Home